

**Proposta de Resolução do Exame do 12º ano Matemática A (Prova 635)**

**2011 - 2ª Fase**

**Grupo I**

1. Pela Regra de Laplace temos que a probabilidade do acontecimento é dada por :

$$P = \frac{{}^{20}C_4}{{}^{30}C_4}$$

Opção correcta: versão 1: B                      versão 2: C

2. Atendendo aos dados fornecidos temos que:

$$P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{3}{10} \Leftrightarrow 3a = \frac{3}{10} \Leftrightarrow a = \frac{1}{10}$$

$$\text{Então: } b + b + b = 1 - \frac{4}{10} \Leftrightarrow 3b = \frac{6}{10} \Leftrightarrow b = \frac{1}{5}$$

Opção correcta: versão 1: D                      versão 2: A

3. A distribuição, por ser normal, é simétrica em relação à sua média que é zero. Então

$$P(X \leq a) = P(X \geq -a)$$

Opção correcta: versão 1: B                      versão 2: C

4. Como  $f$  é polinomial de grau 4 e com dois pontos de inflexão então a função segunda derivada é polinomial de grau dois com dois zeros distintos. Atendendo aos sentidos de concavidade apresentados temos que  $f''(x) = x^2 - 9$

Opção correcta: versão 1: D                      versão 2: A

$$5. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\text{sen } x}{3x} \right) = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\text{sen } x}{x} \right) = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (\ln(k-x)) = \ln k$$

$$g(0) = \ln k$$

Como a função é contínua então temos que  $\ln k = \frac{1}{3} \Leftrightarrow k = e^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow k = \sqrt[3]{e}$

Opção correcta: versão 1: A                      versão 2: B

$$6. \overline{OE} = \text{sen } \theta \quad \overline{EA} = \cos \theta \quad \overline{OA} = 1$$

$$\text{Perímetro} = 2(\text{sen } \theta + \cos \theta + 1)$$

Opção correcta: versão 1: C                      versão 2: D

$$7. |z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$\text{tg } \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \wedge \quad \theta \in 2^\circ \text{ quadrante, pelo que } \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$$

Opção correcta: versão 1: B                      versão 2: B

8. Por construção geométrica temos que:

$$z_2 + z_4 = z_3$$

A multiplicação de  $z_3$  por  $i$  produz uma rotação de  $90^\circ$ , no sentido positivo, do afixo de  $z_3$  conduzindo-nos a  $z_5$ .

Opção correcta: versão 1: C                      versão 2: B

## Grupo II

1.

1.1.

$$\begin{aligned} w &= \frac{(1+2i) \times i^{4n+3} - b}{\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{5}{4}\pi\right)} = \frac{(1+2i) \times i^3 - b}{\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)} = \frac{(1+2i) \times (-i) - b}{-1-i} = \\ &= \frac{-i - 2i^2 - b}{-1-i} \times \frac{-1+i}{-1+i} = \frac{(-i+2-b)(-1+i)}{1-i^2} = \frac{i-2+b-i^2+2i-bi}{2} = \frac{-1+b+(3-b)i}{2} = \\ &= \frac{-1+b}{2} + \frac{3-b}{2}i \end{aligned}$$

Para  $w$  ser um número real, tem que se verificar:

$$\frac{3-b}{2} = 0 \Leftrightarrow 3-b = 0 \Leftrightarrow b = 3$$

1.2.

Seja  $z = a + bi$  com  $a, b \in \mathbb{R}$

Se  $|z| = 1$ , então  $\sqrt{a^2 + b^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$

Pelo que:

$$\begin{aligned} |1+z|^2 + |1-z|^2 &= |1+a+bi|^2 + |1-a-bi|^2 = \left(\sqrt{(1+a)^2 + b^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(1-a)^2 + (-b)^2}\right)^2 = \\ &= 1+2a+a^2+b^2+1-2a+a^2+b^2 = 2+2(a^2+b^2) = 2+2 \times 1 = 4 \quad \text{c.q.d.} \end{aligned}$$

2.

2.1.

Consideremos os seguintes acontecimentos:

A: ser licenciado

B: ter idade inferior a 40 anos

A partir dos dados fornecidos construímos a tabela seguinte em que se registam as diferentes probabilidades dos acontecimentos respectivos:

	B	$\bar{B}$	Total
A	0,48	0,12	0,6
$\bar{A}$	0,04	0,36	0,4
Total	0,52	0,48	1

Pretendemos determinar:

$$P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0,12}{0,48} = \frac{1}{4}$$

2.2.

A resposta correcta é a II, ou seja,  $6 \times {}^9C_2 + {}^9C_3$ .

Ao escolher ao acaso 3 funcionários, de entre um grupo de 15, ter pelo menos 2 funcionários que estejam a favor do novo horário, quer dizer que estes poderão ser 2 ou 3.

O número de hipóteses de serem os 3 a favor é dado por  ${}^9C_3$  uma vez que se escolhem 3 entre os 9 funcionários a favor.

O número de hipóteses de serem apenas 2 a favor entre os 3 escolhidos é dado por  $6 \times {}^9C_2$  uma vez que se escolhem 2 entre os 9 a favor e 1 dos 6 funcionários que não são a favor.

Assim, o número total de hipóteses corresponde a  $6 \times {}^9C_2 + {}^9C_3$ .

Por outro lado, o acontecimento contrário ao solicitado seria ter 0 ou 1 funcionário a favor do novo horário, de entre os 3 escolhidos ao acaso no grupo de 15.

O número total de maneiras diferentes de escolher os 3 funcionários entre os 15 é dado por  ${}^{15}C_3$

O número total de maneiras diferentes de entre os 3 funcionários escolhidos nenhum ser a favor é dado por  ${}^6C_3$  e o número total de maneiras diferentes de entre os 3 funcionários escolhidos apenas 1 ser a favor é dado por  $9 \times {}^6C_2$

Então, alterando a expressão I para  ${}^{15}C_3 - {}^6C_3 - 9 \times {}^6C_2$  obtém-se também uma resposta correcta para o problema.

3.

3.1.

$$N_A(0) = \frac{120}{1+7 \times e^{-0,2 \times 0}} = 15 \text{ e } N_A(7) = \frac{120}{1+7 \times e^{-0,2 \times 7}} \approx 44,02$$

$$N_A(7) - N_A(0) \approx 44 - 15 = 29$$

O aumento foi de 29 nenúfares

3.2.

$$\begin{aligned} N_A(t) = N_B(t) &\Leftrightarrow \frac{120}{1+7 \times e^{-0,2t}} = \frac{150}{1+50 \times e^{-0,4t}} \Leftrightarrow 120 + 6000 \times e^{-0,4t} = 150 + 1050 \times e^{-0,2t} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6000 \times e^{-0,4t} - 1050 \times e^{-0,2t} - 30 = 0 \Leftrightarrow 6000 \times (e^{-0,2t})^2 - 1050 \times e^{-0,2t} - 30 = 0 \end{aligned}$$

Seja  $y = e^{-0,2t}$ . Substituindo na expressão anterior, temos que:

$$6000y^2 - 1050y - 30 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{5} \vee y = -\frac{1}{40}$$

Como  $y \geq 0$  para qualquer elemento do domínio temos  $y = \frac{1}{5}$

$$\text{Ou seja } e^{-0,2t} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}{-0,2} \approx 8,05$$

No decorrer do 9º dia o número de nenúfares no lago A iguala o do lago B, pelo que só depois de passados 8 dias completos se dá a igualdade nos dois lagos.

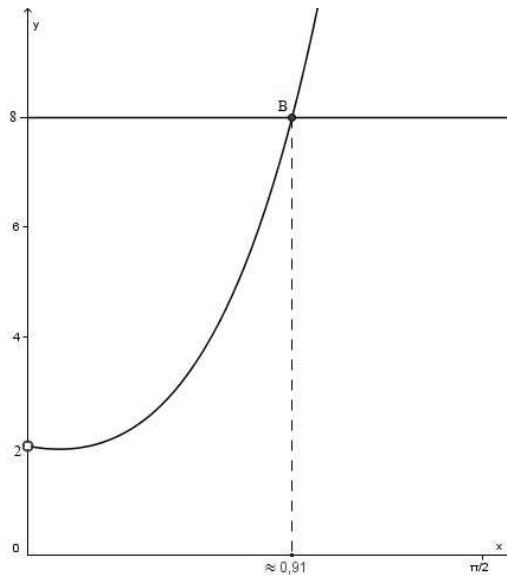
4.

Atendendo aos dados do problema temos que o valor do declive da recta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto B tem que ser 8.

$$f'(x) = 2e^{2x} - \sin x - 4x$$

$$\text{Seja } x \text{ a abcissa de B. Então } f'(x) = 8 \Leftrightarrow 2e^{2x} - \sin x - 4x = 8$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, numa janela adequada, representamos a curva correspondente a  $f'(x)$  e a recta de equação  $y = 8$ .



Determinando a intersecção obtemos para a abcissa de B o valor de 0,91, aproximadamente.

5.

5.1. Em cada um dos ramos em que se encontra definida, a função é contínua por se tratar de quocientes de funções contínuas no respectivo domínio. A existir assíntota vertical, esta terá de equação  $x = 2$ . Estudemos os limites necessários:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^{2-x} - 1}{x - 2} = -\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^{2-x} - 1}{2 - x} \quad (1)$$

Fazendo  $y = 2 - x$  temos que quando  $x \rightarrow 2^-$  vem  $y \rightarrow 0^+$ , pelo que de (1) vem:

$$-\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^{2-x} - 1}{2 - x} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 1}{\ln(x + 1)} = \frac{3}{\ln 3}$$

Os limites estudados são reais, pelo que o gráfico de  $f$  não admite assíntotas verticais.

5.2.

A função  $f$  é contínua em  $[0, 2[$  por se tratar do quociente de funções contínuas pelo que também o é no intervalo  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ . Estamos então em condições de aplicar o Teorema de Bolzano.

$$f(0) = \frac{e^2 - 1}{-2} \approx -3,19$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{2-\frac{1}{2}} - 1}{\frac{1}{2} - 2} \approx -2,32$$

Ora, como  $f(0) < -3 < f\left(\frac{1}{2}\right)$ , então, pelo referido teorema, existe pelo menos um valor  $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$  tal que  $f(x) = -3$  c.q.d.

5.3.

Para  $x > 2$ , vem:

$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{\ln(x+1)}\right)' = \frac{\ln(x+1) - (x+1)\frac{1}{x+1}}{(\ln(x+1))^2} = \frac{\ln(x+1) - 1}{(\ln(x+1))^2}$$

Ora, para  $x > 2$ , temos que  $\ln(x+1) - 1 > 0$ , e, por outro lado,  $(\ln(x+1))^2 > 0$  pelo que:  $f'(x) > 0, \forall x \in ]2, +\infty[$

Então  $f$  é estritamente crescente neste intervalo.

6.

$$f'(x) = -an \sin(nx) + bn \cos(nx)$$

$$f''(x) = -an^2 \cos(nx) - bn^2 \sin(nx)$$

$$f''(x) + n^2 f'(x) = -an^2 \cos(nx) - bn^2 \sin(nx) + n^2 (a \cos(nx) + b \sin(nx)) = -an^2 \cos(nx) - bn^2 \sin(nx) + an^2 \cos(nx) + bn^2 \sin(nx) = 0 \quad \text{c.q.d.}$$