



Prova Escrita de Matemática B

10.º e 11.º Anos de Escolaridade

Prova 735/1.ª Fase

13 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2012

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente feitos a lápis e a seguir passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Em todas as respostas, indique todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

- sempre que recorrer às capacidades gráficas da calculadora, apresente o(s) gráfico(s) obtido(s), bem como as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);
- sempre que recorrer a uma tabela obtida na calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- sempre que recorrer a estatísticas obtidas na calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma reta de regressão, etc.), apresente a(s) lista(s) que introduziu na calculadora para as obter.

A prova inclui, na página 3, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $\text{Área da base} \times \text{Altura}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

• **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

• **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i , então:

• **Valor médio de X :**

$$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$

• **Desvio padrão de X :**

$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ , então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

GRUPO I

Num jardim de infância, realizou-se uma festa para inaugurar a sala polivalente. As crianças que frequentam o jardim de infância estiveram presentes na festa, tendo participado em diversas atividades.

1. A direção da instituição sugeriu que, no dia da festa, as crianças levassem livros para a biblioteca.

A Figura 1 apresenta o gráfico de barras das frequências absolutas acumuladas referentes ao número de livros que cada criança levou no dia da festa.

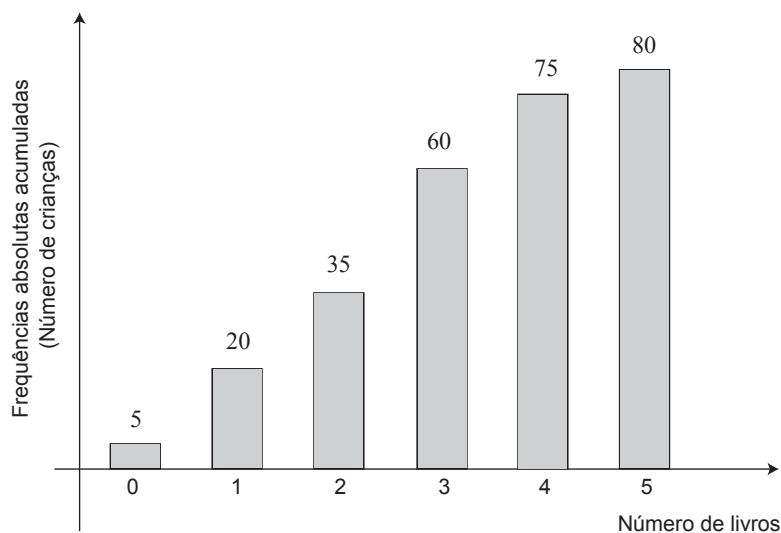


Figura 1

A partir deste gráfico, foi construído o diagrama de extremos e quartis, representado na Figura 2, referente ao número de livros que cada criança levou no dia da festa.

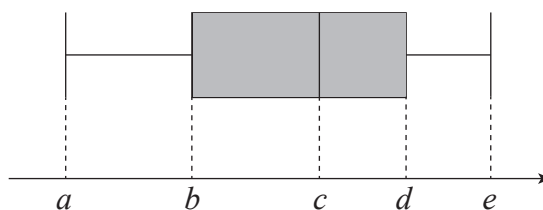


Figura 2

Como a Figura 2 sugere, a , b , c , d e e representam os extremos e os quartis referentes ao número de livros que cada criança levou no dia da festa.

Determine os valores de a , b , c , d e e

2. Uma das atividades da festa consistia em, após o lançamento de um dado cúbico equilibrado, colocar uma bola numa caixa ou retirar uma bola dessa caixa.

Em cada uma das faces do dado está desenhado um triângulo ou um quadrado, como ilustra a planificação do dado representada na Figura 3.

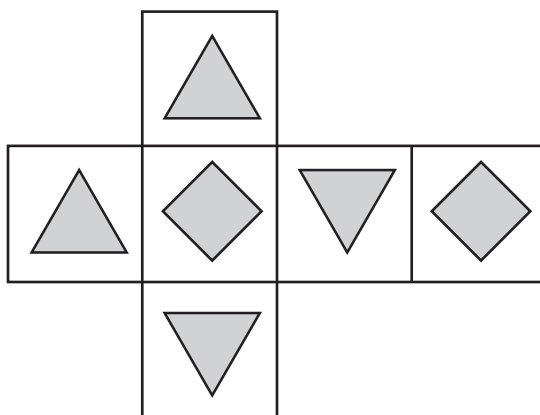


Figura 3

Para realizar esta atividade, uma criança lança uma única vez o referido dado. Se na face que ficar voltada para cima estiver representado um triângulo, a criança coloca uma bola na caixa. Se na face que ficar voltada para cima estiver representado um quadrado, a criança retira uma bola da caixa.

Antes do lançamento do dado, a caixa contém duas bolas.

Considere a variável aleatória X : «número de bolas que ficam na caixa após a criança ter realizado a atividade».

Determine o valor médio da variável aleatória X

Apresente o resultado arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, duas casas decimais.

3. Na sala polivalente do jardim de infância, existe um conjunto de treze peças. Cada uma das peças do conjunto tem a forma de um polígono regular com 1 dm de lado. No conjunto, não existem duas peças com o mesmo número de lados.

As crianças vão colocar as peças por ordem crescente do seu número de lados. Assim, como sugere a Figura 4, a primeira peça a ser colocada tem a forma de um triângulo equilátero, a segunda peça tem a forma de um quadrado, e assim sucessivamente, até ser colocada a última peça, de quinze lados.

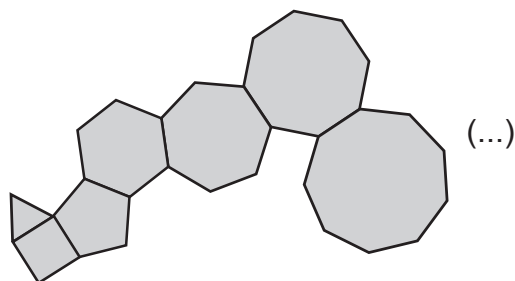


Figura 4

- 3.1. Admita que as peças têm espessura desprezável. Na tabela, estão registados os valores das áreas, em dm^2 , arredondados com quatro casas decimais, das primeiras dez peças do conjunto.

Número de lados da peça	Área (dm^2)
3	0,4330
4	1,0000
5	1,7205
6	2,5981
7	3,6339
8	4,8284
9	6,1818
10	7,6942
11	9,3656
12	11,1962

Admita ainda que a relação entre a área, em dm^2 , de cada peça e o respetivo número de lados pode ser modelada por uma função quadrática, cuja variável independente é o número de lados da peça.

Estime a área da peça que tem 15 lados.

Apresente o resultado, em dm^2 , arredondado às décimas.

Recorra à calculadora e utilize a regressão quadrática para obter uma expressão de uma função quadrática que se ajuste aos dados da tabela.

Apresente os valores numéricos da expressão, obtidos na calculadora, arredondados com, pelo menos, quatro casas decimais.

3.2. Uma diagonal de um polígono regular é qualquer segmento de reta que une dois vértices não consecutivos do polígono.

Na Figura 5, que não está à escala, estão representados os três polígonos regulares que correspondem às formas das três primeiras peças do conjunto, e estão representadas, a ponteados, as respectivas diagonais.

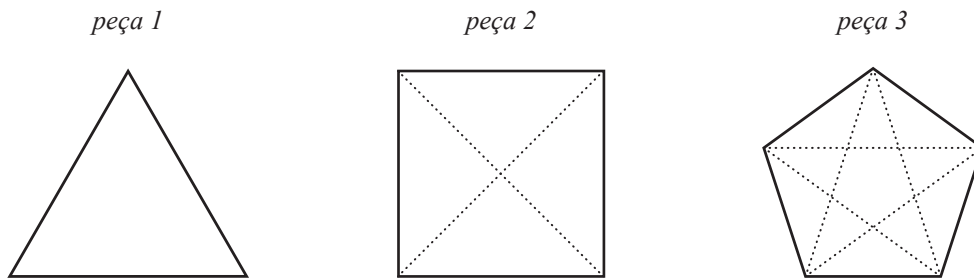


Figura 5

Admita que, ao conjunto de treze peças, é possível acrescentar indefinidamente peças com a forma de polígonos regulares, nenhuma com o mesmo número de lados.

A *peça 1* tem a forma de um polígono regular de três lados, a *peça 2* tem a forma de um polígono regular de quatro lados, a *peça 3* tem a forma de um polígono regular de cinco lados, e assim sucessivamente, tendo a *peça n* a forma de um polígono regular de $n + 2$ lados.

Considere a sucessão (d_n) definida por

$$d_n = 0,5n^2 + 0,5n - 1$$

cujo termo de ordem n é o número de diagonais do polígono regular que corresponde à forma da *peça n*

3.2.1. Justifique o facto de a sucessão (d_n) não ser uma progressão aritmética.

3.2.2. Determine o número de diagonais de um polígono regular de 20 lados.

GRUPO II

Numa certa empresa de suinicultura, é necessário fornecer a cada animal adulto, diariamente, além da alimentação padrão, um suplemento de Granulado e Farinha.

Sabe-se que:

- cada quilograma de Granulado contém 30 gramas de hidratos de carbono, 75 gramas de vitaminas e 45 gramas de proteínas;
- cada quilograma de Farinha contém 75 gramas de hidratos de carbono, 15 gramas de vitaminas e 45 gramas de proteínas;
- o suplemento diário de Granulado e Farinha dado a cada animal adulto, para ser adequado, deve conter pelo menos 300 gramas de hidratos de carbono, pelo menos 225 gramas de vitaminas e pelo menos 315 gramas de proteínas;
- o suplemento diário dado a cada animal adulto não deve conter mais de 10 quilogramas de Granulado nem mais de 15 quilogramas de Farinha.

Sabe-se ainda que cada quilograma de Granulado custa 5 euros e que cada quilograma de Farinha custa 2,5 euros.

Designe por x o número de quilogramas de Granulado que o suplemento diário dado a cada animal adulto contém e por y o número de quilogramas de Farinha que o suplemento diário dado a cada animal adulto contém.

Determine quantos quilogramas de Granulado e quantos quilogramas de Farinha deve conter o suplemento diário dado a cada animal adulto, de modo que, nas condições referidas, o custo desse suplemento seja mínimo.

Na sua resposta, percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

- indicar a função objetivo;
- indicar as restrições do problema;
- representar, graficamente, a região admissível referente ao sistema de restrições;
- calcular o número de quilogramas de Granulado e o número de quilogramas de Farinha que o suplemento diário dado a cada animal adulto deve conter, correspondentes à solução do problema.

GRUPO III

Uma determinada empresa da área de informática tem dois departamentos: o departamento FERMAT e o departamento GALOIS.

Considere que o resultado líquido de um departamento, obtido num certo dia, consiste na diferença entre os ganhos e os custos contabilizados até ao final desse dia.

Admita que o resultado líquido diário do departamento FERMAT, em **milhares de euros**, no dia de ordem x do ano de 2010, é dado por

$$f(x) = -0,00001x^3 + 0,00533x^2 - 0,77216x + 26,53300 \quad \text{com } x \in \{1, \dots, 365\}$$

Por exemplo, no dia 1 de março de 2010, sexagésimo dia desse ano, o resultado líquido obtido pelo departamento FERMAT é dado por $f(60)$

1. Determine o resultado líquido do departamento FERMAT obtido no dia 15 de fevereiro de 2010.

Apresente o valor do resultado líquido em euros, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, conserve cinco casas decimais.

2. Determine o maior resultado líquido diário do departamento FERMAT obtido nos últimos seis meses do ano de 2010.

Apresente o valor do resultado líquido em euros, arredondado às unidades.

3. Admita que o resultado líquido diário do departamento GALOIS, em **milhares de euros**, no dia de ordem x do ano de 2010, é dado por

$$g(x) = (1 - e^{(0,005x - 0,5)}) \times f(x) \quad \text{com } x \in \{1, \dots, 365\}$$

em que f é o modelo relativo ao departamento FERMAT.

Determine o número de dias do ano de 2010 em que o resultado líquido diário do departamento FERMAT foi superior ao resultado líquido diário do departamento GALOIS.

GRUPO IV

A Figura 6 é uma representação de um desenho da autoria de Leonardo da Vinci, no qual estão assinaladas duas regiões disjuntas, uma a sombreado e outra a tracejado.

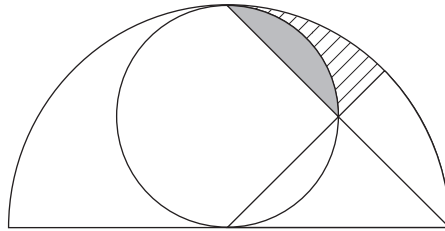


Figura 6

Da Vinci mostrou que estas duas regiões têm exatamente a mesma área.

A Figura 7, que não está à escala, mostra uma composição geométrica construída a partir do desenho de Da Vinci, tendo como base o semicírculo $ABCE$

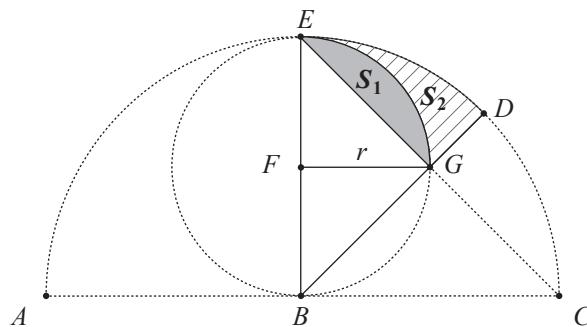


Figura 7

Considere que:

- $[AC]$ é o diâmetro do semicírculo de centro no ponto B
- $[BE]$ é o raio do semicírculo de centro no ponto B , perpendicular a $[AC]$
- $[BE]$ é um diâmetro do círculo de centro no ponto F
- $[FG]$ é um raio do círculo de centro no ponto F , paralelo a $[AC]$, tal que $\overline{FG} = r$
- D é o ponto de intersecção da semicircunferência de centro no ponto B com a reta BG
- S_1 é a região delimitada pela corda $[GE]$ e pelo arco de circunferência GE
- S_2 é a região delimitada por $[GD]$ e pelos arcos de circunferência GE e DE

1. Mostre que a área de S_1 é exatamente igual à área de S_2 , seja qual for o valor de \overline{BE}

2. Considere $r = 2$

Calcule o perímetro de S_2

Apresente o resultado final arredondado às centésimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, três casas decimais.

3. Considere agora a Figura 8, construída a partir da Figura 7.

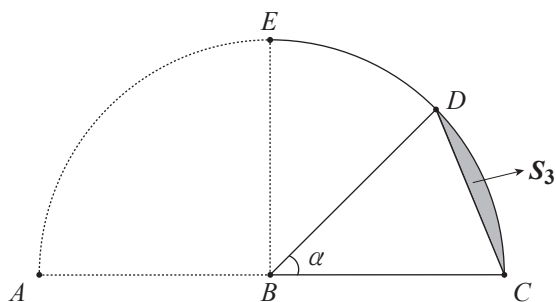


Figura 8

Admita que $\overline{BE} = 4$ e que o ponto D se movimenta ao longo do arco de circunferência CE , nunca coincidindo com os extremos do arco.

Nessas condições, para o ângulo CBD , seja α a amplitude positiva mínima em radianos, e seja S_3 a região delimitada pela corda $[CD]$ e pelo respetivo arco.

Considere a função h que dá a área de S_3 para cada valor de α , de acordo com a seguinte expressão:

$$h(\alpha) = 8\alpha - 8 \operatorname{sen}(\alpha)$$

O argumento da função seno está em radianos.

3.1. Indique o domínio da função h

3.2. Elabore uma pequena composição na qual justifique o facto de a expressão $8\alpha - 8 \operatorname{sen}(\alpha)$ dar a área de S_3 , para cada valor de α

Na sua composição, explique, no contexto do problema:

- o que representa a expressão 8α
- o que representa a expressão $8 \operatorname{sen}(\alpha)$
- por que razão se calcula a diferença entre as duas expressões anteriores para se obter a área de S_3

FIM

Página em branco

COTAÇÕES

GRUPO I

1.	15 pontos
2.	15 pontos
3.		
3.1.	20 pontos
3.2.		
3.2.1.	10 pontos
3.2.2.	15 pontos
		<hr/>
		75 pontos

GRUPO II

.....	20 pontos
	<hr/>
	20 pontos

GRUPO III

1.	15 pontos
2.	10 pontos
3.	20 pontos
		<hr/>
		45 pontos

GRUPO IV

1.	15 pontos
2.	15 pontos
3.		
3.1.	10 pontos
3.2.	20 pontos
		<hr/>
		60 pontos

TOTAL **200 pontos**