

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO  
SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 635) – 1ª FASE – 26 DE JUNHO 2014

Grupo I

Questões	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	C	A	C	B	B	D	C	D
Versão 2	B	D	B	C	B	C	A	C

Grupo II

1.

1.1. Seja  $w_1 = -1 + \sqrt{3}i$

Tem-se que:

- $|w_1| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

- sendo  $\theta$  um argumento de  $w_1$ , como  $\theta \in 2^\circ$  quadrante e  $\operatorname{tg} \theta = -\sqrt{3}$ , vem  $\theta = \frac{2\pi}{3}$

Assim  $w_1 = 2\operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$

Considerando  $w_2 = 1 - i$ , tem-se:

- $|w_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

- sendo  $\alpha$  um argumento de  $w_2$ , como  $\alpha \in 4^\circ$  quadrante e  $\operatorname{tg} \alpha = -1$ , vem  $\alpha = -\frac{\pi}{4}$

Logo  $w_2 = \sqrt{2}\operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Substituindo vem:

$$z_1 = \frac{(-1 + \sqrt{3}i)^3}{1-i} = \frac{\left(2\text{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^3}{\sqrt{2}\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{8\text{cis}(2\pi)}{\sqrt{2}\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{8}{\sqrt{2}}\text{cis}\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{8\sqrt{2}}{2}\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\text{cis}\frac{\pi}{4}$$

$$z_1 \times z_2^2 = 4\sqrt{2}\text{cis}\frac{\pi}{4} \times (\text{cis}\alpha)^2 = 4\sqrt{2}\text{cis}\frac{\pi}{4} \times \text{cis}(2\alpha) = 4\sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)$$

Para que  $z_1 \times (z_2)^2$  seja um imaginário puro,  $\frac{\pi}{4} + 2\alpha$  tem de ser da forma  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ).

$$\text{Ora } \frac{\pi}{4} + 2\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \pi + 8\alpha = 2\pi + 4k\pi \Leftrightarrow 8\alpha = \pi + 4k\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$$

Pretende-se que  $\alpha$  pertença ao intervalo  $[0, \pi[$ . Para isso, deve considerar-se  $k=0$  e  $k=1$ .

$$\text{Vem então } \alpha = \frac{\pi}{8} \text{ e } \alpha = \frac{5\pi}{8}.$$

1.2. Sabe-se que  $|z|^2 = z \times \bar{z}$ ,  $\forall z \in \square$ . Assim,

$$\begin{aligned} |1+z|^2 + |1-z|^2 \leq 10 &\Leftrightarrow (1+z)(\overline{1+z}) + (1-z)(\overline{1-z}) \leq 10 \Leftrightarrow (1+z)(1+\bar{z}) + (1-z)(1-\bar{z}) \leq 10 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1+z+\bar{z}+z\times\bar{z}+1-z-\bar{z}+z\times\bar{z} \leq 10 \Leftrightarrow 2+2z\times\bar{z} \leq 10 \Leftrightarrow z\times\bar{z} \leq 4 \Leftrightarrow |z|^2 \leq 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2 \leq |z| \leq 2 \Leftrightarrow |z| \leq 2 \end{aligned}$$

E assim se concluiu o pretendido.

2.

2.1. Dado o acontecimento  $B$ : "As três bolas retiradas não têm a mesma cor" o acontecimento contrário é:  $\bar{B}$ : "As três bolas retiradas têm a mesma cor".

Ora o acontecimento  $\bar{B}$  ocorre apenas quando as três bolas retiradas tiverem cor preta. Atendendo a que a extração das três bolas é simultânea, o número de casos possíveis é dado por  $C_3^9$  e o número de casos favoráveis à ocorrência de  $\bar{B}$  é igual  $C_3^6$ .

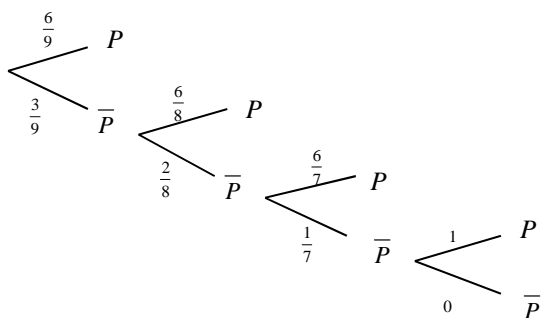
$$\text{Assim, } P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{C_3^6}{C_3^9} = 1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21}$$

Conclui-se então que a probabilidade de as bolas retiradas não serem todas da mesma cor é  $\frac{16}{21}$ .

2.2.

Do enunciado retiramos que os valores da variável  $X$  são: 1, 2, 3 e 4.

Seja  $P$  o acontecimento "sair bola preta". Para determinar a probabilidade de cada um dos valores da variável, consideremos o seguinte diagrama:



$$P(X=1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{6}{7} = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}$$

$$P(X=4) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{7} \times 1 = \frac{1}{84}$$

Assim, a tabela de distribuição da variável  $X$  é:

$x_i$	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{84}$

3.  $P(A|B)$  designa a probabilidade de o acontecimento  $A$  ocorrer sabendo que  $B$  já ocorreu, isto é, a probabilidade de o nº registado no primeiro lançamento ser negativo, sabendo que o produto dos números registados nos dois lançamentos é positivo.

Ora se o produto dos nºs registados nos dois lançamentos é positivo isso significa que esses números são ambos positivos ou ambos negativos. Vamos determinar o nº de casos possíveis com recurso a uma tabela de dupla entrada:

Admitindo que o acontecimento  $B$  se realizou, sabemos que o produto dos números registados nos dois lançamentos é positivo, pelo que existem 10 casos possíveis, dos quais apenas um é favorável à realização do acontecimento  $A$ , ou seja há apenas um caso em que o nº registado no primeiro lançamento é negativo.

x	-1	1	2	3
-1	+	-	-	-
1	-	+	+	+
2	-	+	+	+
3	-	+	+	+

De acordo com a lei de Laplace o valor pedido é:  $P(A|B) = \frac{1}{10}$ .

4. O ângulo  $AHC$  é o ângulo formado pelos vetores  $\overrightarrow{HC}$  e  $\overrightarrow{HA}$ .  
 Como o ponto  $A$  pertence ao semieixo positivo  $Ox$  as suas coordenadas são  $(a, 0, 0)$ , com  $a > 0$   
 Como a aresta do cubo é 3 o ponto  $A$  tem coordenadas  $(3, 0, 0)$ .

Dado que o ponto  $C$  pertence ao semieixo negativo  $Oy$  e a aresta do cubo é 3 as suas coordenadas são  $(0, -3, 0)$ .

Como  $\alpha$  é a amplitude do ângulo  $AHC$  tem-se que:

$$\overline{HC} \cdot \overline{HA} = \|\overline{HC}\| \times \|\overline{HA}\| \times \cos \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\overline{HC} \cdot \overline{HA}}{\|\overline{HC}\| \times \|\overline{HA}\|}.$$

Por outro lado tem-se:

$$\overline{HC} = C - H = (0, -3, 0) - (3, -2, 3) = (-3, -1, -3);$$

$$\overline{HA} = A - H = (3, 0, 0) - (3, -2, 3) = (0, 2, -3);$$

$$\overline{HC} \cdot \overline{HA} = (-3, -1, -3) \cdot (0, 2, -3) = 0 - 2 + 9 = 7;$$

$$\|\overline{HC}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{19} \quad \text{e} \quad \|\overline{HA}\| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}.$$

Assim vem,

$$\cos \alpha = \frac{\overline{HC} \cdot \overline{HA}}{\|\overline{HC}\| \times \|\overline{HA}\|} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{7}{\sqrt{19} \times \sqrt{13}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{7}{\sqrt{247}}.$$

$$\text{Como } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ vem } \sin^2 \alpha + \left(\frac{7}{\sqrt{247}}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{49}{247} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{198}{247}.$$

5.

5.1.

A função  $f$  é contínua em  $x = 4$  se, e só se,  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4)$ .

Começemos por calcular os limites laterais:

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (\ln(2e^x - e^4)) = \ln(2e^4 - e^4) = \ln(e^4) = 4.$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left( \frac{e^{x-4} - 3x + 11}{4 - x} \right); \text{ indeterminação do tipo } \frac{0}{0}$$

Fazendo a mudança de variável:  $y = x - 4 \Leftrightarrow x = y + 4$ .

Como  $x \rightarrow 4^-$  então  $y \rightarrow 0^-$  e assim,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \left( \frac{e^{x-4} - 3x + 11}{4 - x} \right) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left( \frac{e^{x-4} - 3x + 11}{-(x-4)} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \left( \frac{e^y - 3(y+4) + 11}{-y} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^-} \left( \frac{e^y - 1 - 3y}{-y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \left( -\frac{e^y - 1}{y} + 3 \right) \end{aligned}$$

Atendendo a que o limite da soma é igual à soma dos limites das parcelas, quando estes existem vem:

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} \left( -\frac{e^y - 1}{y} + 3 \right) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \left( -\frac{e^y - 1}{y} \right) + \lim_{y \rightarrow 0^-} (3) = -1 + 3 = 2 .$$

Então  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 2$

Concluimos então que  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$

Portanto  $f$  não é contínua em  $x = 4$  porque os limites laterais são diferentes.

5.2.

Como o gráfico de  $f$  admite uma assíntota de equação  $y = x + b$ , com  $b \in \mathbf{R}$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ , o declive da assíntota é  $m = 1$ , pelo que

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2e^x - e^4) - x)$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2e^x - e^4) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2e^x - e^4) - \ln e^x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln \left( \frac{2e^x - e^4}{e^x} \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln \left( 2 - \frac{e^4}{e^x} \right) \right) \\ &= \ln \left( 2 - \frac{e^4}{+\infty} \right) \\ &= \ln(2 - 0) \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

Então,  $b = \ln 2$ .

6.

$$6.1. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2x - \pi} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{2} \times \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} \right)$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} \right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ e } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \text{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \text{sen}(\pi) = \frac{\pi}{2} \text{ tem-se:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{2} \times \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}. \text{ Assim, } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2x - \pi} \right) = \frac{\pi}{4}$$

6.2.

Para efetuar o estudo das concavidades do gráfico de  $f$  determinemos a expressão analítica da segunda derivada de  $f$ .

$$\begin{aligned} f''(x) &= (x - \operatorname{sen}(2x))' \\ &= (x)' - (\operatorname{sen}(2x))' \\ &= 1 - (2x)' \times \cos(2x) \\ &= 1 - 2\cos(2x) \end{aligned}$$

Determinemos os zeros da segunda derivada de  $f$  no intervalo  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \right[$ .

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow 1 - 2\cos(2x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbf{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbf{Z} \end{aligned}$$

Como se pretendem os zeros de  $f''$  no intervalo  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \right[$  devemos considerar  $k=0$ .

As soluções da equação  $f''(x) = 0$  são:  $-\frac{\pi}{6}$  e  $\frac{\pi}{6}$ .

Estudemos o sinal de  $f''$

$x$	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$
$f''$	n.d.	+	0	-	0	+	n.d.
$f$	n.d.	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$	n.d.

Por observação da tabela, conclui-se que o gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para cima em

$\left] -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6} \right[$  e em  $\left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right[$  e tem a concavidade voltada para baixo no intervalo  $\left] -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right[$ .

O gráfico de  $f$  tem dois pontos de inflexão de abscissas  $-\frac{\pi}{6}$  e  $\frac{\pi}{6}$ .

7. De acordo com o enunciado, o triângulo  $[ABC]$  é retângulo em  $C$ .

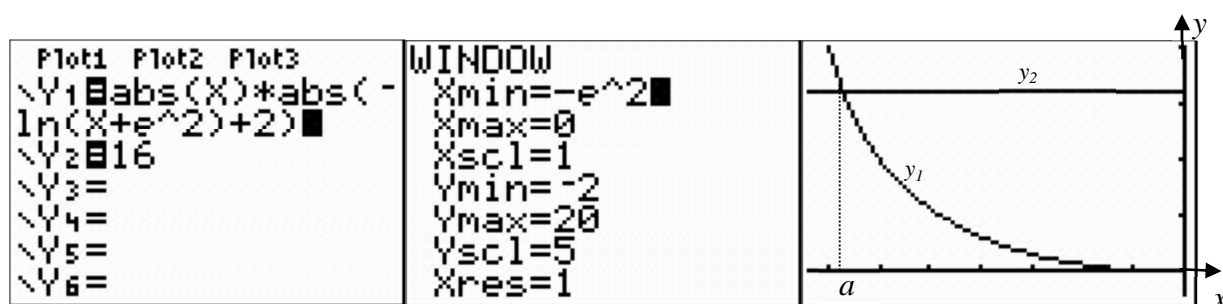
Assim, designando por  $x$  a abcissa do ponto  $B$ , a área do triângulo  $[ABC]$  é dada, em função de  $x$ , por:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{AC}}{2} \Leftrightarrow 8 = \frac{|x| \times |f(x) + 2|}{2} \Leftrightarrow 16 = |x| \times |-\ln(x + e^2) + 2|,$$

com  $x \in ]-e^2, 0[$ , pois a abcissa de  $B$  é negativa.

Recorrendo à calculadora gráfica, pretendemos determinar o valor de  $x \in ]-e^2, 0[$  que verifica

a condição:  $|x| \times |-\ln(x + e^2) + 2| = 16$  (\*)



O valor de  $x$  que verifica a condição (\*), corresponde à abcissa  $a$ , do ponto de interseção dos gráficos das funções designadas por  $y_1$  e  $y_2$ , com  $a \approx -6,71$ .

A abcissa do ponto  $B$  é aproximadamente  $-6,71$ .