

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 635) – 2ª FASE – 21 DE JULHO 2017

GRUPO I

1.

Temos que os algarismos pares, ficando juntos podem ocupar 4 pares de posições e trocando entre si, podem figurar no número de 2×4 formas distintas.

Os algarismos ímpares devem ocupar as 3 posições restantes, podendo trocar entre si, o que corresponde a ${}^3A_3 = P_3 = 3!$ disposições diferentes.

Assim, considerando todas as disposições diferentes dos algarismos pares e ímpares, temos que o total de números naturais nas condições do enunciado é: $2 \times 4 \times 3! = 8 \times 6 = 48$.

Resposta correta:

Versão 1: B
Versão 2: D

2.

Temos que:

$$P(X > 1 | X \leq 3) = \frac{P(X > 1 \cap X \leq 3)}{P(X \leq 3)} = \frac{P(X = 2) + P(X = 3)}{1 - P(X = 4)} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{5}{9}$$

Resposta correta:

Versão 1: D
Versão 2: B

3.

Pela definição de derivada num ponto, temos que: $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

Assim, vem que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{f(x) - f(2)} = 4 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 2x}} = 4 \Leftrightarrow \frac{\lim_{x \rightarrow 2} 1}{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x(x-2)}} = 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{2} \times f'(2)} = 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 = \frac{1}{2} \times f'(2) \times 4 \Leftrightarrow 1 = \frac{4}{2} \times f'(2) \Leftrightarrow 1 = 2 \times f'(2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f'(2) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Resposta correta:

Versão 1: C
Versão 2: A

4.

Dado que $(g \circ f)(x) = 0 \Leftrightarrow g(f(x)) = 0$.

Como o único zero da função g é 2, ou seja, $g(a) = 0 \Leftrightarrow a = 2$, então vem que:

$$g(f(x)) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2$$

E, por observação do gráfico de f podemos verificar que os objetos cuja imagem é 2 pela função f são 1 e 5.

Resposta correta:

Versão 1: B
Versão 2: C

5.

Estudando a variação do sinal da função derivada g'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de g , vem:

x	$-\infty$	$-10 + 5 = -5$		$0 + 5 = 5$		$10 + 5 = 15$	$+\infty$
$g''(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$g(x)$	∪	P. I.	∩	P. I.	∪	P. I.	∩

De onde se verifica que, o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $]-5, 5[$.

Resposta correta:

Versão 1: C
Versão 2: B

6.

Seja $z = \rho \operatorname{cis} \frac{\pi}{5}$ então,

$$-5i \times z = -5i \times \operatorname{cis} \frac{\pi}{5} = 5 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{2} \right) \times \rho \operatorname{cis} \frac{\pi}{5} = 5 \rho \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} \right) = 5 \rho \operatorname{cis} \left(-\frac{3\pi}{10} \right)$$

Resposta correta:

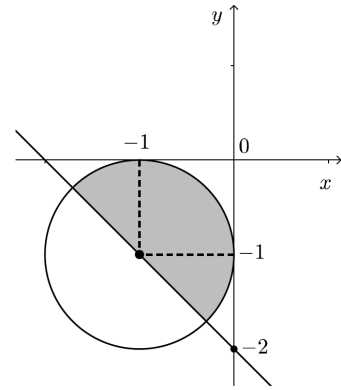
Versão 1: A
Versão 2: B

7.

A condição $(x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 1$ representa todos os pontos do plano que pertencem ao círculo de centro $(-1, -1)$ e raio 1 e a condição $x + y + 2 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -x - 2$ corresponde ao semiplano fechado superior, determinado pela reta de equação $y = -x - 2$.

Como o centro pertence à reta de equação $y = -x - 2$, então a condição $(x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 1 \wedge x + y + 2 \geq 0$ representa o conjunto dos pontos do semicírculo de centro $(-1, -1)$ e raio 1.

Pelo que, o perímetro dessa região é igual a $1 + 1 + \frac{2\pi}{2} = 2 + \pi$.



Resposta correta:

Versão 1: C
Versão 2: A

8.

Como $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-n} = \frac{1}{2^{1-n}} = 2^{n-1}$, então

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^n}{2^{n-1}} = 2^{n-(n-1)} = 2^1 = 2, \forall n \in \mathbb{N}$, logo é uma progressão geométrica de razão 2.

Resposta correta:

Versão 1: B
Versão 2: D

GRUPO II

1.

A condição $|z - z_1| = |z - z_2|$ define o conjunto dos pontos que está à mesma distância dos afixos dos complexos z_1 e z_2 , ou seja, a mediatriz do segmento de reta cujos extremos são os afixos de z_1 e de z_2 .

Para mostramos que o complexo $\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$, que denotaremos por w , satisfaz a condição dada,

temos que começar por determinar o complexo z_2 , uma vez que não é dado.

Dado que $z_1 = 2 + i$ e que $z_1 \times \bar{z}_2 = 4 - 3i$, determinemos z_2 :

$$\begin{aligned} z_1 \times \bar{z}_2 = 4 - 3i &\Leftrightarrow \bar{z}_2 = \frac{4 - 3i}{2 + i} \Leftrightarrow \bar{z}_2 = \frac{(4 - 3i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} \Leftrightarrow \bar{z}_2 = \frac{8 - 4i - 6i - 3}{4 + 1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \bar{z}_2 = \frac{5 - 10i}{5} \Leftrightarrow \bar{z}_2 = 1 - 2i \end{aligned}$$

Temos então que $z_2 = 1 + 2i$, dado que o seu conjugado é $\bar{z}_2 = 1 - 2i$.

Passemos w da forma trigonométrica para a forma algébrica:

$$w = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow w = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) \Leftrightarrow w = 1 + i$$

Verifiquemos, agora, se w satisfaz a condição dada.

$$|(1 + i) - (2 + i)| = |(1 + i) - (1 + 2i)| \Leftrightarrow |-1 + 0i| = |0 - i| \Leftrightarrow 1 = 1, \text{ como obtivemos}$$

uma igualdade numérica verdadeira podemos afirmar que, de facto, o afixo de $w = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$,

pertence à mediatriz do segmento de reta cujos extremos são os afixos de z_1 e de z_2 .

2.

2.1.

Tem-se que o ponto C pertence ao eixo Oy , pelo que as suas coordenadas são do tipo $C(0, y_C, 0)$. Como C também pertence ao plano ACG , substituindo as coordenadas de C na equação de ACG , vem:

$$0 + y_C - 0 - 6 = 0 \Leftrightarrow y_C = 6, \text{ então o ponto } C \text{ tem coordenadas } C(0, 6, 0).$$

Como D tem coordenadas $(0, 4, 0)$, a medida do comprimento da aresta $[CD]$ é $6 - 4 = 2$. Portanto, a medida do comprimento das arestas do cubo é 2, pelo que a abcissa do ponto A é 2 (a face $[ABCD]$ está contida em xOy).

2.2.

A condição que define a reta r pode ser escrita da forma $x - 1 = 1 - y = z \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = z \\ 1 - y = z \end{cases}$.

Considerando um sistema de três equações e três incógnitas com a condição que define a reta r e o com a condição que define o plano ACG , podemos determinar as coordenadas do seu ponto de intersecção:

$$\begin{cases} x - 1 = z \\ 1 - y = z \\ x + y - z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z + 1 \\ y = 1 - z \\ \cancel{x} + 1 + 1 - \cancel{z} - z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 + 1 \\ y = 1 - (-4) \\ z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \\ z = -4 \end{cases}$$

\therefore As coordenadas do ponto de intersecção da reta r com o plano ACG são $(-3, 5, -4)$.

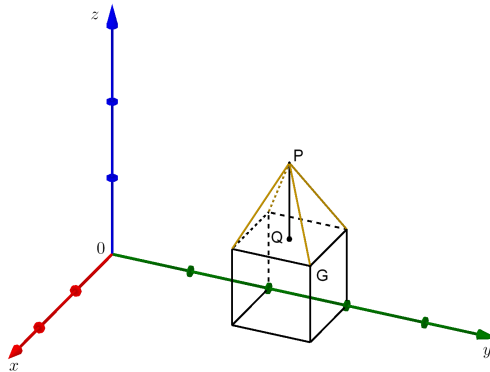
2.3.

Tem-se que a amplitude do ângulo OGP é igual à amplitude do ângulo formado pelos vetores \overline{GO} e \overline{GP} . Assim, sendo α a amplitude desse ângulo, tem-se que $\cos \alpha = \frac{\overline{GO} \cdot \overline{GP}}{\|\overline{GO}\| \times \|\overline{GP}\|}$.

▪ $G(2, 6, 2)$, pelo que $\overline{GO} = O - G = (0, 0, 0) - (2, 6, 2) = (-2, -6, -2)$

Logo, $\|\overline{GO}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$

▪ O ponto P tem a mesma abscissa e a mesma ordenada que o centro Q , da face $[EFGH]$, pelo que as suas coordenadas são da forma $P(1, 5, z_P)$, com $z_P > 2$.



O volume da pirâmide é dado por $\frac{\overline{EF}^2 \times \overline{QP}}{3}$, pelo que,

$$\frac{\overline{EF}^2 \times \overline{QP}}{3} = 4 \Leftrightarrow \frac{2^2 \times \overline{QP}}{3} = 4 \Leftrightarrow \overline{QP} = \frac{4 \times 3}{4} = 3$$

Logo, $P(1, 5, 2 + 3) = (1, 5, 5)$.

Assim, $\overline{GP} = P - G = (1, 5, 5) - (2, 6, 2) = (-1, -1, 3)$ e portanto

$$\|\overline{GP}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{11}.$$

▪ $\cos \alpha = \frac{\overline{GO} \cdot \overline{GP}}{\|\overline{GO}\| \times \|\overline{GP}\|} = \frac{(-2, -6, -2) \cdot (-1, -1, 3)}{2\sqrt{11} \times \sqrt{11}} = \frac{2 + 6 - 6}{2 \times 11} = \frac{2}{22}$, então $\alpha \approx 85^\circ$.

∴ A amplitude do ângulo OGP é, aproximadamente, 85° .

3.

3.1.

Tendo em conta os acontecimentos seguintes:

A: “ O aluno escolhido é rapariga”

B: “ O aluno escolhido frequenta o 10ºano”

Sabe-se que $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0,82$ e que $P(B|A) = \frac{1}{3}$.

Assim,

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0,82 &\Leftrightarrow P(\overline{A \cap B}) = 0,82 \Leftrightarrow 1 - P(A \cap B) = 0,82 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P(A \cap B) = 1 - 0,82 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,18 \end{aligned} \quad (1).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} P(B|A) = \frac{1}{3} &\Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{0,18}{P(A)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(A)}{0,18} = 3 \Leftrightarrow P(A) = 0,18 \times 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P(A) = 0,54 \end{aligned}$$

De onde se conclui que $P(A) = 0,54$.

3.2.

Temos um saco com cartões numerados de 1 a 30.

Como queremos retirar quatro cartões simultaneamente, o número de casos possíveis é dado pela expressão: ${}^{30}C_4$, pois trata-se de escolher do conjunto dos 30 cartões existentes no saco subconjuntos de quatro elementos.

Se os dois menores números, dos quatro retirados simultaneamente, são os número 7 e 22, então os restantes dois números poderão ser escolhidos entre os números 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 e 30.

Isto é, o número de casos favoráveis é dado pela expressão 8C_2 pois, podemos fazer subconjuntos de dois elementos de entre os oito disponíveis.

Assim, e tendo em conta a regra de Laplace, a probabilidade pedida é dado por:

$$\frac{{}^8C_2}{{}^{30}C_4} = \frac{28}{27405} \approx 0,001.$$

∴ A probabilidade de os dois menores números saídos serem o 7 e o 22 é aproximadamente 0,001.

4.

4.1.

Determinemos as:

- Assíntotas verticais:

A função f é contínua em $]0, +\infty[$, por ser o quociente de duas funções contínuas.

Uma vez que a função f é contínua em $]0, +\infty[$, apenas a reta de equação $x = 0$ poderá ser assíntota vertical do gráfico de f .

Tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Portanto, a reta de equação $x = 0$ é a única assíntota vertical do gráfico de f .

- Assíntotas horizontais:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \text{ limite notável.}$$

Portanto, a reta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f quando x tende para $+\infty$. Não existem outras assíntotas horizontais porque o domínio de f é limitado inferiormente.

4.2.

$$\begin{aligned} f(x) > 2\ln(x) \wedge x \in \mathbb{R}^+ &\Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x} > 2\ln(x) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x} - 2\ln(x) > 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln(x) - 2x \ln(x)}{x} > 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \frac{\ln(x)(1-2x)}{x} > 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Como $x \in \mathbb{R}^+$, então o sinal de $\frac{\ln(x)(1-2x)}{x}$ só depende do sinal do numerador

$$\ln(x)(1-2x).$$

Calculemos os zeros da expressão $\ln(x)(1-2x)$:

$$\ln(x)(1-2x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \vee 1-2x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{1}{2}$$

Estudando a variação do sinal vem:

x	0		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$\ln(x)$		-	-	-	0	+
$(1-2x)$		+	0	-	-	-
$\ln(x)(1-2x)$		-	0	+	0	-

Conclui-se que o conjunto solução da condição $f(x) > 2\ln(x)$ é o intervalo $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$.

4.3

Começemos por determinar a expressão analítica da primeira derivada de g .

$$g'(x) = \left(\frac{k}{x} + \frac{\ln x}{x} \right)' = \left(\frac{k}{x} \right)' + \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = -\frac{k}{x^2} + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{-k + 1 - \ln x}{x^2}.$$

Para cada valor de $k \in \mathbb{R}$, a função g é derivável em \mathbb{R}^+ .

Como g é uma função derivável em \mathbb{R}^+ e tem um extremo relativo em $x = 1$, então $g'(1) = 0$.

Resolvendo esta equação em ordem a k , vem:

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{-k + 1 - \ln 1}{1^2} = 0 \Leftrightarrow -k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1$$

Assim, $k = 1$.

5.

Desenvolvendo a expressão dada, vem:

$$\begin{aligned}\left(2x \operatorname{sen} \alpha + \frac{\cos \alpha}{x}\right)^2 &= 4x^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{4x \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{x} + \frac{\cos^2 \alpha}{x^2} \\ &= 4x^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 4 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{x^2}, \text{ com } x \neq 0\end{aligned}$$

Neste desenvolvimento, o termo independente de x é igual a 1, pelo que,
 $4 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 1 \Leftrightarrow 2 \operatorname{sen}(2\alpha) = 1$.

Determinemos os valores de $\alpha \in]\pi, 2\pi[$ que verificam a condição: $2 \operatorname{sen}(2\alpha) = 1$.

$$\begin{aligned}2 \operatorname{sen}(2\alpha) = 1 \wedge \alpha \in]\pi, 2\pi[&\Leftrightarrow \operatorname{sen}(2\alpha) = \frac{1}{2} \wedge \alpha \in]\pi, 2\pi[\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen}(2\alpha) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \wedge \alpha \in]\pi, 2\pi[\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(2\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2\alpha = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi\right) \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge \alpha \in]\pi, 2\pi[\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\alpha = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee \alpha = \frac{5\pi}{12} + k\pi\right) \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge \alpha \in]\pi, 2\pi[\end{aligned}$$

Se $k = 0$, então $\alpha = \frac{\pi}{12}$ e $\alpha = \frac{5\pi}{12}$;

Se $k = 1$, então $\alpha = \frac{13\pi}{12}$ e $\alpha = \frac{17\pi}{12}$;

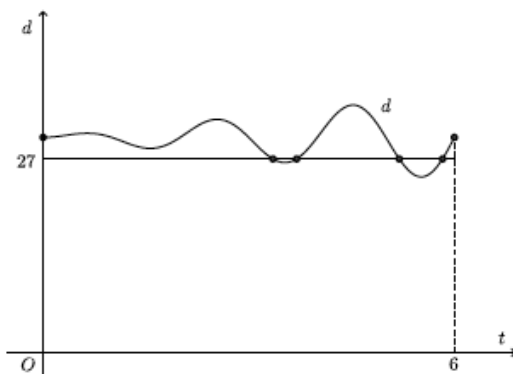
Se $k = 2$, então $\alpha = \frac{25\pi}{12}$ e $\alpha = \frac{29\pi}{12}$.

Assim, os valores de $\alpha \in]\pi, 2\pi[$ que verificam a condição $2 \operatorname{sen}(2\alpha) = 1$ são: $\frac{13\pi}{12}$ e $\frac{17\pi}{12}$.

6.

6.1.

Representando na calculadora gráfica o gráfico da função d , definida por $d(t) = 30 + t \times \text{sen} \pi$, pois $t \in [0, 6]$ e a reta de equação $d = 27$, (reproduzidos na figura ao lado) podemos observar que a reta interseca o gráfico da função d , naquele intervalo, em 4 pontos, pelo que o número de soluções da equação $d(t) = 27$, no intervalo $[0, 6]$, é 4.



No contexto da situação descrita, a existência de 4 soluções no intervalo $[0, 6]$, significa que a criança esteve a uma distância de 27 decímetros do muro, por quatro vezes, nos primeiros seis segundos.

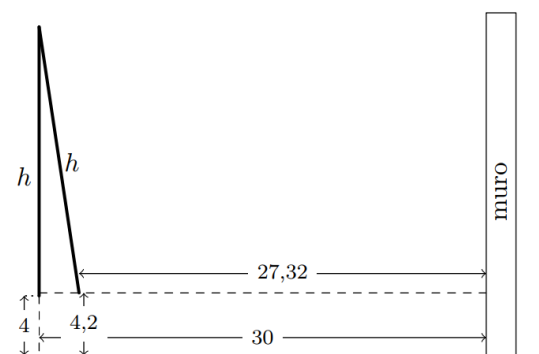
6.2.

No instante inicial as hastes estão na vertical e a distância ao chão é de 4 dm, e, no mesmo instante a distância ao muro é dada por:

$$d(0) = 30 + 0 \times \text{sen}(\pi \times 0) = 30 + 0 = 30 \text{ dm}$$

Passados treze segundos e meio a distância ao chão é de 4,2 dm e a distância ao muro é dada por:

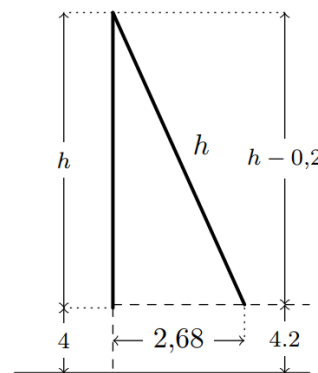
$$\begin{aligned} d(13,5) &= 30 + 12e^{12-13,5} \times \text{sen}(\pi \times 13,5) = \\ &= 30 + 12e^{-1,5} \times \text{sen}(\pi \times 13,5) \approx 27,32 \text{ dm} \end{aligned}$$



Assim, podemos considerar um triângulo retângulo, cuja hipotenusa tem o comprimento da haste (h), um dos catetos mede $h + 4 - 4,2 = h - 0,2$ e o outro cateto mede $d(0) - d(13,5) \approx 30 - 27,32 \approx 2,68$.

E assim, recorrendo ao teorema de Pitágoras, um valor aproximado do comprimento da haste é dado por:

$$\begin{aligned} h^2 &= (h - 0,2)^2 + 2,68^2 \Leftrightarrow h^2 = h^2 - 0,4h + 0,2^2 + 2,68^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0,4h = 0,2^2 + 2,68^2 \Leftrightarrow h = \frac{0,2^2 + 2,68^2}{0,4} \end{aligned}$$



Como $\frac{0,2^2 + 2,68^2}{0,4} \approx 18$, o valor do comprimento da haste, arredondado às unidades, é 18 dm.