

**PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE
MATEMÁTICA A DO ENSINO SECUNDÁRIO
(CÓDIGO DA PROVA 635) – 1ª FASE – JUNHO 2022**

1. Para cada uma das expressões apresentadas, considerando que

- se n é par, então $(-1)^n = 1$;
- se n é ímpar, então $(-1)^n = -1$;

temos que:

- $(-1)^n \times n$ não representa uma sucessão convergente porque:
 n par: $\lim ((-1)^n \times n) = \lim n = +\infty$
 n ímpar: $\lim ((-1)^n \times n) = \lim(-n) = -\infty$
- $\frac{(-1)^n}{n}$ representa uma sucessão convergente porque:
 n par: $\lim \left(\frac{(-1)^n}{n} \right) = \lim \frac{1}{n} = 0$
 n ímpar: $\lim \left(\frac{(-1)^n}{n} \right) = \lim \left(-\frac{1}{n} \right) = 0$
- $(-1)^n + n$ não representa uma sucessão convergente porque:
 n par: $\lim ((-1)^n + n) = \lim n = +\infty$
 n ímpar: $\lim ((-1)^n + n) = \lim(-1 + n) = +\infty$
- $(-1)^n - n$ não representa uma sucessão convergente porque:
 n par: $\lim ((-1)^n - n) = \lim(1 - n) = -\infty$
 n ímpar: $\lim ((-1)^n - n) = \lim(-1 - n) = -\infty$

Resposta: **Opção B**

2. Como a soma dos 5 primeiro termos da progressão geométrica é 211 e a razão é $\frac{2}{3}$, calculando o primeiro termo (u_1), temos:

$$S_5 = 211 \Leftrightarrow 211 = u_1 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5}{1 - \frac{2}{3}} \Leftrightarrow 211 = u_1 \times \frac{211}{81} \Leftrightarrow \frac{211 \times 81}{211} = u_1 \Leftrightarrow 81 = u_1$$

E assim, o 5.º termo (u_5), é:

$$u_5 = u_1 \times r^4 = 81 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 16$$

3. Temos que:

- Como $A \cap B = \emptyset$ então $P(A \cap B) = 0$
- $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0,6 = 0,4$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0,6 = P(A) + 0,4 - 0 \Leftrightarrow 0,6 - 0,4 = P(A) \Leftrightarrow 0,2 = P(A)$

E assim: $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,2 = 0,8$

Resposta: **Opção D**

4. Se as duas peças a colocar no tabuleiro foram da mesma cor, interessa selecionar 2 das 12 posições do tabuleiro, sem considerar a ordem relevante (${}^{12}C_2$) porque as peças a colocar são iguais, e o número de seleções possíveis deve ser multiplicado por 3 porque existem 3 cores para as peças a colocar (verdes, amarelas e encarnadas). Ou seja, o número de formas diferentes de dispor duas peças da mesma cor no tabuleiro é:

$$3 \times {}^{12}C_2$$

Se as duas peças foram de cores distintas, interessa selecionar 2 das 3 cores disponíveis (3C_2), e para cada um destes pares de cores, escolher 2 das 12 posições do tabuleiro, considerando a ordem relevante (${}^{12}A_2$) porque as peças a colocar são diferentes. Ou seja, o número de formas diferentes de dispor duas peças de cores diferentes no tabuleiro é:

$${}^3C_2 \times {}^{12}A_2$$

Como é possível, em alternativa, obter qualquer um destes dois tipos de configurações temos que o número de configurações coloridas diferentes que é possível obter é:

$$3 \times {}^{12}C_2 + {}^3C_2 \times {}^{12}A_2$$

5. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um aluno da que participou no torneio de jogos matemáticos, e os acontecimentos:

S : «O aluno jogou Semáforo»

R : «O aluno jogou Rastros»

Temos que $P(S) = \frac{1}{2}$, $P(\overline{R}) = \frac{1}{4}$ e $P(S|\overline{R}) = \frac{1}{5}$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P(S \cap \overline{R}) = P(\overline{R}) \times P(S|\overline{R}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$
- $P(S \cap R) = P(S) - P(S \cap \overline{R}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20}$
- $P(R) = 1 - P(\overline{R}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

	S	\overline{S}	
R	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{4}$
\overline{R}	$\frac{1}{20}$		$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$		1

Assim, a probabilidade de um aluno que participou no torneio escolhido, ao acaso, não ter jogado Semáforo e ter jogado Rastros, na forma de fração irredutível, é:

$$P(\overline{S} \cap R) = P(R) - P(S \cap R) = \frac{3}{4} - \frac{9}{20} = \frac{3}{10}$$

6.

6.1. Como se pretende identificar um plano perpendicular ao plano que contém a base do cone, então os respectivos vetores normais devem ser perpendiculares, pelo que calculamos os produtos escalares entre os vetores normais dos planos definidos em cada uma das hipóteses o vetor normal do plano que contém a base do cone para encontrar um produtos escalares nulos e assim identificar planos perpendiculares:

- $(0,4,-3) \cdot (0,4,-3) = 0 + 4 \times 4 + (-3) \times (-3) = 16 + 9 = 25$
- $(3,4,1) \cdot (0,4,-3) = 3 \times 0 + 4 \times 4 + 1 \times (-3) = 0 + 16 - 3 = 13$
- $(0,3,4) \cdot (0,4,-3) = 0 + 3 \times 4 + 4 \times (-3) = 12 - 12 = 0$
- $(1,3,4) \cdot (0,4,-3) = 0 + 3 \times 4 + 4 \times (-3) = 0 + 12 - 12 = 0$

Assim, temos que apenas as equações apresentadas nas opções (C) e (D) representam planos perpendiculares ao plano que contém a base do cone, pelo que resta verificar qual das duas equações é verificada pelas coordenadas do ponto $(1,2,-1)$, substituindo as suas coordenadas em cada uma das equações:

- $3(2) + 4(-1) = 18 \Leftrightarrow 6 - 4 = 18 \Leftrightarrow 2 = 18$ (Proposição falsa)
- $1 + 3(2) + 4(-1) = 3 \Leftrightarrow 1 + 6 - 4 = 3 \Leftrightarrow 3 = 3$ (Proposição verdadeira)

Ou seja a equação $x + 3y + 4z = 3$ define um plano perpendicular ao plano que contém a base do cone e passa no ponto de coordenadas $(1,2,-1)$

Resposta: **Opção D**

6.2. Como o cone é reto e o ponto A é a base do centro, temos que a reta AV é perpendicular ao plano que contém a base do cone, pelo que o vetor normal do plano ($\vec{u} = (0,4,-3)$) também é um vetor diretor da reta AV .

Como o ponto A pertence ao plano definido por $4y - 3z = 16$, e pertence ao eixo Oy , ou seja, tem cota nula, temos que a sua ordenada (y_A) é:

$$4y_A - 3(0) = 16 \Leftrightarrow 4y_A = 16 \Leftrightarrow y_A = \frac{16}{4} \Leftrightarrow y_A = 4$$

E assim, temos que as coordenadas do ponto A são $(0,4,0)$, e uma equação vetorial da reta AV é:

$$(x,y,z) = (0,4,0) + \lambda(0,4,-3), \lambda \in \mathbb{R}$$

Pelo que a cota do ponto V , que pertence ao eixo Oz e, por isso tem coordenadas $(0,0,z_V)$, pode ser calculada por:

$$\begin{cases} 0 = 0 + 0\lambda \\ 0 = 4 + 4\lambda \\ z_V = 0 - 3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -4 = 4\lambda \\ z_V = -3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -1 = \lambda \\ z_V = -3(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -1 = \lambda \\ z_V = 3 \end{cases}$$

Desta forma, recorrendo ao teorema de Pitágoras calculamos a altura do cone (\overline{AV}):

$$\overline{AV}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OV}^2 \Leftrightarrow \overline{AV}^2 = y_A^2 + z_V^2 \Leftrightarrow \overline{AV}^2 = 4^2 + 3^2 \xrightarrow{\overline{AV} > 0} \overline{AV} = \sqrt{16 + 9} \Leftrightarrow \overline{AV} = \sqrt{25} \Leftrightarrow \overline{AV} = 5$$

E assim, como o raio da base do cone é 3, o respetivo volume é:

$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 5 = \frac{\pi \times 3 \times 3 \times 5}{3} = 15\pi$$

7. Como a circunferência tem raio 3, o respectivo perímetro é $2 \times \pi \times 3 = 6\pi$

Assim, o comprimento do arco AB é 2π , a amplitude do ângulo ACB é:

$$\frac{A\hat{C}B}{2\pi} = \frac{2\pi}{2\pi \times 3} \Leftrightarrow A\hat{C}B = \frac{2\pi \times 2\pi}{6\pi} \Leftrightarrow A\hat{C}B = \frac{4\pi}{6} \Leftrightarrow A\hat{C}B = \frac{2\pi}{3}$$

Desta forma, como ambos os vetores têm norma 3, recorrendo à fórmula do produto escalar, vem:

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = \cos(\widehat{C\vec{B}CB}) \times \|\vec{CA}\| \times \|\vec{CB}\| = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \times 3 \times 3 = -\frac{1}{2} \times 9 = -\frac{9}{2}$$

8.

8.1. Para averiguar se a função f é contínua em $x = 2$, temos que verificar se $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

- $f(2) = \frac{e^{2-2}}{2+2} = \frac{e^0}{4} = \frac{1}{4}$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{e^{2-x}}{x+2} \right) = \frac{e^{2-2}}{2+2} = \frac{e^0}{4} = \frac{1}{4}$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\text{sen}(x-2)}{x^2-4} = \frac{\text{sen}(2-2)}{2^2-4} = \frac{\text{sen}(0)}{4-4} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

(como $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\text{sen}(x-2)}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\text{sen}(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{\text{sen}(x-2)}{(x-2)} \times \frac{1}{(x+2)} \right) =$$

(considerando $y = x - 2$, temos $x = y + 2$ e se $x \rightarrow 2^-$, então $y \rightarrow 0^-$)

$$= \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(x+2)} = 1 \times \frac{1}{2+2} = 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Como $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, então a função f é contínua em $x = 2$.

8.2. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f , em $] -\infty, -2[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{e^{2-x}}{x+2} \right)' = \frac{((2-x)'e^{2-x})(x+2) - e^{2-x} \times (x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{-1 \times e^{2-x} \times (x+2) - e^{2-x} \times 1}{x^2} = \\ &= \frac{-e^{2-x}(x+2) - e^{2-x}}{(x+2)^2} = \frac{e^{2-x}(-x-3)}{(x+2)^2} = \frac{e^{2-x}(-x-3)}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada da função g , em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^{2-x}(-x-3)}{(x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow e^{2-x}(-x-3) = 0 \wedge \underbrace{(x+2)^2 \neq 0}_{\text{C. universal } (x+2)^2 > 0} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \underbrace{e^{2-x} = 0}_{\text{Impossível}} \vee -x-3 = 0 \Leftrightarrow -3 = x \end{aligned}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	$-\infty$	-3		-2
e^{2-x}	+	+	+	n.d.
$(-x-3)$	+	0	-	n.d.
$e^{2-x}(-x-3)$	+	0	-	n.d.
$(x+2)^2$	+	+	+	n.d.
f'	+	0	-	n.d.
f		↗ Máx ↘		n.d.

Assim, podemos concluir que a função f :

- é crescente no intervalo $] -\infty, -3[$;
- é decrescente no intervalo $[-3, -2[$;
- tem um máximo relativo que é $f(-3) = \frac{e^{2-(-3)}}{-3+2} = \frac{e^{2+3}}{-1} = -e^5$

9.

9.1. Como o ponto do cabo mais próximo do solo é equidistante dos dois postes, está a 5 metros de cada um dos postes, em particular está a 5 metros do poste da esquerda, pelo que $x = 5$

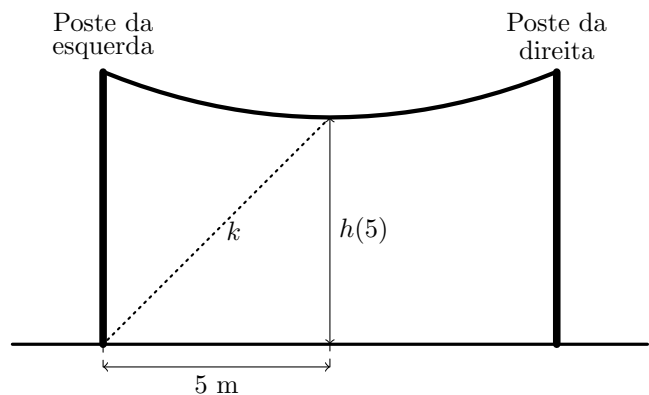
Assim, a altura deste ponto é dada por

$$h(5) = 6,3 \left(e^{\frac{5-5}{12,6}} + e^{\frac{5-5}{12,6}} \right) - 7,6 = 6,3(e^0 + e^0) - 7,6 = 6,3 \times 2 - 7,6 = 5$$

Logo a a distância (k), arredondada às décimas de metro, da base do poste da esquerda ao ponto do cabo que está mais próximo do solo é dada por

$$\begin{aligned} k^2 &= 5^2 + 5^2 \Leftrightarrow k^2 = 25 + 25 \Rightarrow \\ &\Rightarrow_{k>0} k = \sqrt{50} \Rightarrow k \approx 7,1 \text{ m} \end{aligned}$$

Resposta: **Opção A**



9.2. Como o ponto do cabo em causa está situado a d metros do poste da esquerda, a sua altura é $h(d)$.

Desta forma uma redução de 50% da distância, ou seja, a redução da distância para metade é expressa por $\frac{1}{2}d$, e a redução da altura em 30 centímetros (0,3 metros) é expressa por $h(d) - 0,3$.

Logo, o valor da distância d é a solução da equação $h\left(\frac{1}{2}d\right) = h(d) - 0,3$

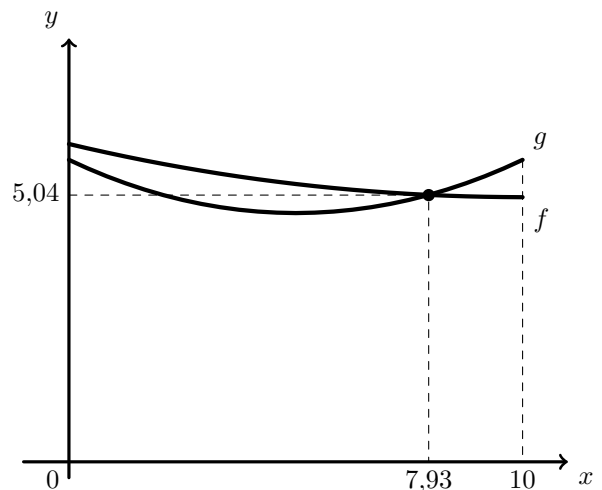
Assim, inserindo na calculadora a função $h(x) = 6,3\left(e^{\frac{x-5}{12,6}} + e^{\frac{5-x}{12,6}}\right) - 7,6$, determinamos o valor de d como a abcissa do ponto de interseção das funções:

- $f(x) = h\left(\frac{1}{2}x\right)$
- $g(x) = h(x) - 0,3$

Representando na calculadora as funções f e g , numa janela compatível com o domínio da função ($x \in [0,10]$), obtemos o gráfico representado na figura ao lado.

Recorrendo à função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção dos dois gráficos, obtemos valores aproximados às décimas da abcissa do ponto de interseção dos dois gráficos:

7,9 metros.



10. Como $\text{Im}(w) = -\text{Re}(w)$, então w é um número complexo da forma $\rho e^{i(-\frac{\pi}{4})}$ e como $\text{Re}(w) > 1$, então $\rho > 1$

Assim, como $-i = e^{i(\frac{3\pi}{2})}$ temos que:

$$-iw^2 = e^{i(\frac{3\pi}{2})} \times \left(\rho e^{i(-\frac{\pi}{4})}\right)^2 = e^{i\pi} \times \rho e^{i(-\frac{\pi}{4})} \times \rho e^{i(-\frac{\pi}{4})} = (1 \times \rho \times \rho) e^{i(\frac{3\pi}{2} + (-\frac{\pi}{4}) + (-\frac{\pi}{4}))} = \rho^2 e^{i(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2})} = \rho^2 e^{i\pi}$$

Como $\rho > 1$ então $\rho^2 > \rho$, então o afixo de iw^2 deve estar a uma distância da origem superior ao afixo de w , e como o afixo pertence ao semieixo real positivo (porque $\text{Arg}(-iw^2) = \pi$), o ponto C é o único que pode representar o afixo de $-iw^2$.

Resposta: **Opção C**

11. Escrevendo $-\sqrt{3} + i$ na forma trigonométrica ($\rho e^{i\theta}$) temos:

- $\rho = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

- $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; como $\operatorname{sen} \theta > 0$ e $\operatorname{cos} \theta < 0$, θ é um ângulo do 2.º quadrante, logo $\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

Assim como $-\sqrt{3} + i = 2e^{i(\frac{5\pi}{6})}$, e como $\sqrt{2}i = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{2})}$, temos que;

$$\begin{aligned} z^3 &= \left(\frac{-\sqrt{3} + i}{\sqrt{2}i} \right)^6 \Leftrightarrow z^3 = \left(\frac{2e^{i(\frac{5\pi}{6})}}{\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{2})}} \right)^6 \Leftrightarrow z^3 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}} e^{i(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2})} \right)^6 \Leftrightarrow z^3 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{2} e^{i(\frac{\pi}{3})} \right)^6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z^3 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{2} \right)^6 e^{i(6 \times \frac{\pi}{3})} \Leftrightarrow z^3 = 8e^{i(2\pi)} \Leftrightarrow z^3 = 8e^{i \times 0} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8e^{i \times 0}} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8} e^{i(\frac{0+2k\pi}{3})} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z = 2e^{i(\frac{2k\pi}{3})}, k \in \{0,1,2\} \end{aligned}$$

Assim, os três números complexos que são solução da equação, são:

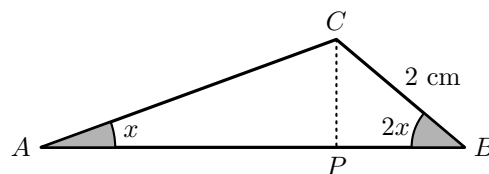
- ($k = 0$) $\rightarrow 2e^{i(\frac{2 \times 0 \times \pi}{3})} = 2e^1 = 2$
- ($k = 1$) $\rightarrow 2e^{i(\frac{2 \times 1 \times \pi}{3})} = 2e^{i(\frac{2\pi}{3})}$
- ($k = 2$) $\rightarrow 2e^{i(\frac{2 \times 2 \times \pi}{3})} = 2e^{i(\frac{4\pi}{3})}$

Como $\frac{4\pi}{3}$ é um ângulo do 3.º quadrante, temos que a solução da equação, cujo afixo pertence a este quadrante, escrita na forma algébrica, é:

$$2e^{i(\frac{4\pi}{3})} = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} \right) = 2 \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 - \sqrt{3}i$$

12. Designado por P o pé da altura do triângulo relativo ao lado $[AB]$, temos que:

- $\operatorname{sen}(2x) = \frac{\overline{CP}}{2} \Leftrightarrow \overline{CP} = 2 \operatorname{sen}(2x)$
- $\operatorname{cos}(2x) = \frac{\overline{BP}}{2} \Leftrightarrow \overline{BP} = 2 \operatorname{cos}(2x)$



Logo, temos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \frac{\overline{CP}}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \overline{AP} = \frac{2 \operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{tg} x} \Leftrightarrow \overline{AP} = \frac{2 \times 2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x}{\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{AP} = \frac{4 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x \times \operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x} \Leftrightarrow \overline{AP} = 4 \operatorname{cos}^2 x \end{aligned}$$

E assim, vem que:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{AP} + \overline{BP} = 4 \operatorname{cos}^2 x + 2 \operatorname{cos}(2x) = 4 \operatorname{cos}^2 x + 2(\operatorname{cos}^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 4 \operatorname{cos}^2 x + 2(\operatorname{cos}^2 x - (1 - \operatorname{cos}^2 x)) = \\ &= 4 \operatorname{cos}^2 x + 2(\operatorname{cos}^2 x - 1 + \operatorname{cos}^2 x) = 4 \operatorname{cos}^2 x + 2(2 \operatorname{cos}^2 x - 1) = 4 \operatorname{cos}^2 x + 4 \operatorname{cos}^2 x - 2 = 8 \operatorname{cos}^2 x - 2 \end{aligned}$$

13. Como a função g é contínua (porque resulta da diferença e do produto de funções contínuas em $]1, +\infty[$), então a reta de equação $x = 1$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de g . Para averiguar esta hipótese vamos calcular $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (5x - 3 \ln(x - 1)) = 5 \times 1^+ - 3 \ln(1^+ - 1) = 5 + 3 \ln(0^+) = 5 - 3 \times (-\infty) = +\infty$$

Assim, como $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = +\infty$, podemos concluir a reta de equação $x = 1$ é a única assíntota vertical do gráfico de g .

Como o domínio da função é $]1, +\infty[$, só poderá existir uma assíntota oblíqua quando $x \rightarrow +\infty$. Desta forma, vamos averiguar a existência de uma assíntota de equação $y = mx + b$:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - 3 \ln(x - 1)}{x} = \underbrace{\frac{+\infty - \infty}{+\infty}}_{\text{Indeterminação}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x}{x} - 3 \times \frac{\ln(x - 1)}{x} \times \frac{x - 1}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 - 3 \times \frac{\ln(x - 1)}{(x - 1)} \times \frac{x - 1}{x} \right) =$$

(fazendo $y = x - 1$, temos $x = y + 1$; e se $x \rightarrow +\infty$, então $y \rightarrow +\infty$)

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 5 - 3 \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{y + 1} = 5 - 3 \times 0 \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{y} = 5 - 3 \times 0 \times 1 = 5$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 5 \times x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x - 3 \ln x - 5x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3 \ln x) = -3 \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = -3 \times (+\infty) = -\infty$$

Assim, como $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - mx)$ não é um valor finito, não existe qualquer assíntota oblíqua do gráfico de g .

14. As soluções da equação pertencem ao conjunto $\{x \in \mathbb{R} : 5 - 2x > 0 \wedge 3 - x > 0\}$

$$\text{Como } -2x > -5 \wedge -x > -3 \Leftrightarrow 2x < 5 \wedge x < 3 \Leftrightarrow x < \frac{5}{2} \wedge x < 3 \Leftrightarrow x < \frac{5}{2},$$

temos que $x \in \left] -\infty, \frac{5}{2} \right[$, e resolvendo a equação, vem que:

$$(e^x - 1) \ln(5 - 2x) + e^x \ln(3 - x) = \ln(3 - x) \Leftrightarrow (e^x - 1) \ln(5 - 2x) + e^x \ln(3 - x) - \ln(3 - x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^x - 1) \ln(5 - 2x) + \ln(3 - x)(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)(\ln(5 - 2x) + \ln(3 - x)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^x - 1)(\ln((5 - 2x) \times (3 - x))) = 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)(\ln(15 - 5x - 6x + 2x^2)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^x - 1)(\ln(2x^2 - 11x + 15)) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \vee \ln(2x^2 - 11x + 15) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = 1 \vee 2x^2 - 11x + 15 = e^0 \Leftrightarrow x = \ln 1 \vee 2x^2 - 11x + 15 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee 2x^2 - 11x + 14 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4(2)(14)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = \frac{7}{2}$$

Assim, como $x < \frac{5}{2}$, $x = \frac{7}{2}$ não é solução da equação, pelo que o conjunto dos números reais que são solução da equação, é: $\{0, 2\}$

15. Considerando a e b as abscissas dos pontos A e B , respectivamente, temos que as ordenadas são, respectivamente $\frac{k}{a}$ e $\frac{k}{b}$, pelo que o declive da reta AB é:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{k}{b} - \frac{k}{a}}{b - a} = \frac{\frac{ak}{ab} - \frac{bk}{ab}}{b - a} = \frac{\frac{ak - bk}{ab}}{b - a} = \frac{k(a - b)}{ab(b - a)} = \frac{k(a - b)}{ab \times (-1)(a - b)} \stackrel{a \neq b}{=} \frac{k}{-ab} = -\frac{k}{ab}$$

Considerando c como a abscissa do ponto em que a reta tangente ao gráfico de f é paralela à reta AB , temos que $m = f'(c)$. Assim temos que:

$$f'(x) = \left(\frac{k}{x}\right)' = \frac{k' \times x - x' \times k}{x^2} = \frac{0 \times x - 1 \times k}{x^2} = -\frac{k}{x^2}$$

E assim, $f'(c) = -\frac{k}{c^2}$, temos que:

$$m = f'(c) \Leftrightarrow -\frac{k}{ab} = -\frac{k}{c^2} \Leftrightarrow \frac{k}{ab} = \frac{k}{c^2} \Leftrightarrow c^2 = \frac{k \times ab}{k} \stackrel{k \neq 0}{\Leftrightarrow} c^2 = ab \stackrel{c > 0}{\Leftrightarrow} c = \sqrt{ab}$$

Como $a < b$, então temos que:

- $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow \sqrt{a} \times \sqrt{a} < \sqrt{b} \times \sqrt{a} \Leftrightarrow a < \sqrt{ab}$
- $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow \sqrt{a} \times \sqrt{b} < \sqrt{b} \times \sqrt{b} \Leftrightarrow \sqrt{ab} < b$

Assim, temos que $a < \sqrt{ab} < b$, e ainda que a , \sqrt{ab} e b são termos consecutivos de uma progressão geométrica, porque o quociente dos termos consecutivos é constante (e igual à razão), ou seja:

$$\frac{\sqrt{ab}}{a} = \frac{b}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow (\sqrt{ab})^2 = a \times b \Leftrightarrow ab = ab \text{ (Proposição verdadeira)}$$