

**PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B
DO ENSINO SECUNDÁRIO
(CÓDIGO DA PROVA 735) – 1ª FASE – 26 DE JUNHO 2024**

1. Considerando x o número de embalagens do molho A e y o número de embalagens do molho B a produzir pela empresa.

Do enunciado retiramos que:

- Molho A necessita de 2 litros de mel, de 1 litro de vinagre e de 1 litro de molho de soja.
- Molho B necessita de 1 litro de mel, de 2 litros de vinagre e de 1 litro de molho de soja.

A empresa tem disponíveis 24 litros de mel de onde resulta que $2x + y \leq 24$; e dispõe também de 24 litros de vinagre o que faz com que $x + 2y \leq 24$.

Se na produção dos dois tipos de molhos devem ser utilizados, pelo menos, 14 litros de molho de soja então $x + y \geq 14$.

Como $x \geq 0$ e $y \geq 0$, porque estamos a falar em números de embalagens.

Temos então as correspondências:

$$I \rightarrow \leq;$$

$$II \rightarrow \leq;$$

$$III \rightarrow \geq.$$

2. Relativamente à vespa-asiática sabemos que, no início do dia 1 de janeiro de 2017, a presença desta espécie foi detetada, pela primeira vez, numa região com 57 000 Km² de área.

Dado que a percentagem, P , desta área, afetada pela presença da vespa-asiática, x anos após o dia 1 de janeiro de 2017, é bem modelada por $P(x) = \frac{86,8}{1+9,85e^{-0,5x}}$, com $x \geq 0$.

A percentagem daquela área, afetada pela presença da vespa-asiática, no início do dia 1 de janeiro de 2017, era de $P(0) = \frac{86,8}{1+9,85e^0} = \frac{86,8}{1+9,85} = \frac{86,8}{10,85} = 8$, ou seja, $P(0) = 8\%$.

Com o passar do tempo, a área afetada tende para 86,8 %, porque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{86,8}{1+9,85e^{-0,5 \times (+\infty)}} = \frac{86,8}{1+9,85e^{-\infty}} = \frac{86,8}{1+0} = \frac{86,8}{1} = 86,8$.

A que corresponde uma área de $0,868 \times 57\,000 = 49\,476$ Km²

No dia 1 de janeiro de 2024, isto é, passados 7 anos, a percentagem daquela área, afetada pela presença da vespa-asiática, era $P(7) = \frac{86,8}{1+9,85e^{-0,5 \times 7}} = \frac{86,8}{1+0,297} \approx 66,92$, isto é, superior a 50%.

Temos então as correspondências:

$$I \rightarrow a;$$

$$II \rightarrow c;$$

$$III \rightarrow b.$$

3. Dois exemplos de resposta:

(i) $V(4) = -0,5$, significa que 4 segundos após o início do voo, a distância da abelha à entrada da colmeia estava a diminuir à taxa de 0,5 m/s;

(ii) $V(4) = -0,5$, significa que 4 segundos após o início do voo, a abelha está a aproximar-se da entrada da colmeia à velocidade de 0,5 m/s.

4. Considerando os dados da tabela, obteve-se um modelo de regressão linear, de y sobre x , em que x representa o número de colmeias e cortiços povoados, em milhares, e y representa a produção de mel, em toneladas. Essa regressão foi introduzida na calculadora como $f(x) = -18,78x + 9718,29$

A ano	B ncolmeias	C producao	D	E	F	G	H	I	J
=					=LinRegMx('ncolm				
1	1989	366	3280	Título	Regressão linear...				
2	1983	295	4196	RegEqn	m*x+b				
3	1995	244	3600	m	-18.780324829				
4	1997	239	3690	b	9718.2906942				
5	1999	285	4465	r ²	0.536214479371				
6	2003	228	7310	r	-0.732266672307				
7	2005	188	5686	Resid	{435.308193192...				
8	2007	164	6908						
9	2009	196	6919						
10									

$f(x) := -18.78 \cdot x + 9718.29$	Efectuado
$f(179)$	6356.67
$\frac{14246}{6356.67}$	2.24111051856

Como em 2016 foram contabilizados 179 milhares de colmeias então temos de considerar $x = 179$ e determinar valor estimado pelo modelo de regressão linear calculado $f(179) \approx 6356,67$. Determinando o quociente entre o valor real 14 246 toneladas e o valor estimado 63 56,67 verificamos que $\frac{14246}{6356,67} \approx 2,24$, logo podemos concluir que a afirmação é verdadeira.

5.

5.1. O segmento de reta $[AB]$ é formado pelo equivalente a 3 bases menores e 2 bases maiores de um trapézio, ou seja, pelo equivalente a 7 bases menores de um trapézio.

$$6,3 \div 7 = 0,9$$

A base menor do trapézio mede 0,9 m.

A base menor do trapézio corresponde a um lado do hexágono.

Um hexágono regular pode ser dividido em 6 triângulos regulares.

Determinemos a área de um triângulo equilátero de lado 0,9 m.

Começemos por determinar a altura de cada triângulo.

$$\begin{aligned} 0,9^2 &= x^2 + 0,45^2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 0,9^2 - 0,45^2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 0,6075 \\ \Leftrightarrow x &\approx 0,779 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{\text{triângulo}} &\approx \frac{0,9 * 0,779}{2} \\ \Leftrightarrow A_t &\approx 0,351 \end{aligned}$$

A base do sólido é composta por seis hexágonos e dois trapézios, o que corresponde à área de quarenta e dois triângulos.

$$6 \times 6 + 2 \times 3 = 42$$

$$\begin{aligned} A_{\text{base}} &= 42 \times A_{\text{triângulo}} \\ A_b &\approx 42 \times 0,351 \\ \Leftrightarrow A_b &\approx 14,731 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= A_{\text{base}} \times \text{altura} \\ V &\approx 14,731 \times 2,5 \\ \Leftrightarrow V &\approx 36,828 \end{aligned}$$

R: O sólido tem aproximadamente 37m^3 de volume.

5.2.

Um plano paralelo às bases do prisma, que contenha o ponto médio do segmento de reta $[OA]$, decompõe o prisma em dois sólidos geometricamente iguais.

As bases que contêm os pontos O e A estão contidas, respetivamente, nos planos $x = 0$ e $x = 2,5$, pelo que o plano pretendido será $x = 1,25$

R: (C)

6.

6.1.

Sendo 300 ml o valor médio do volume, temos

$$P(X < 300) = 0,5$$

Sendo 295 e 305 equidistantes de 300, temos

$$P(295 < X < 300) = P(300 < X < 305)$$

Como $P(295 < X < 305) = 0,90$, temos

$$P(295 < X < 300) = P(300 < X < 305) = 0,45$$

$$P(X < 295) = P(X < 300) - P(295 < X < 300)$$

Logo,

$$P(X < 295) = 0,5 - 0,45$$

$$\Leftrightarrow P(X < 295) = 0,05$$

R: (A)

6.2.

O gráfico A, não pode ser porque a área da superfície do líquido aumenta até este ocupar metade do frasco e, a partir desse instante, a área começa a diminuir, ao contrário do que sugere o gráfico, no qual a área está sempre a aumentar.

O gráfico B, não corresponde porque a superfície do líquido é sempre um retângulo, o qual não tem área nula, como sugere o gráfico.

7.

7.1.

	Transportadora A	Transportadora B
Valor Fixo	9,50€/serviço	5€/serviço
Valor Variável	0,60€/km	0,85€/km
Preço a pagar	$9,50 + 10 \times 0,60 = 15,5$	$5 + 10 \times 0,85 = 13,5$

Na transportadora A o preço a pagar seria de 15,5 € e na transportadora B o preço a pagar seria de 13,5 €, pelo que a transportadora B é a que apresenta um preço menor para um percurso de 10km.

7.2.

	Transportadora A	Transportadora B
Valor Fixo	9,50€/serviço	5€/serviço
Valor Variável	0,60€/km	0,85€/km
Preço a pagar em função dos x km percorridos	$y_A = 9,50 + 0,60x$	$y_B = 5 + 0,85x$

$$\begin{aligned} 9,50 + 0,60x &= 5 + 0,85x \Leftrightarrow 9,50 - 5 = 0,85x - 0,60x \Leftrightarrow 4,50 = 0,25x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{4,5}{0,25} = x \Leftrightarrow 18 = x \end{aligned}$$

O preço a pagar pelo serviço em ambas as transportadoras é igual quando o percurso é de 18 km.

8.

O perímetro de uma circunferência é dado pela fórmula

$$P_{\text{circunferência}} = 2\pi r, \text{ em que } r \text{ representa o raio da circunferência.}$$

pele que, o perímetro de uma semicircunferência é dado pela fórmula

$$P_{\text{circunferência}} = \pi r$$

Diâmetro	Raio	Perímetro da semicircunferência
1	0,5	$0,5\pi$
2	1	π
3	1,5	$1,5\pi$
4	2	2π
5	2,5	$2,5\pi$

Numa progressão aritmética a razão é determinada pela diferença entre dois termos consecutivos dessa progressão.

Assim, por exemplo

$$\text{razão} = \pi - 0,5\pi$$

$$\Leftrightarrow \text{razão} = 0,5\pi$$

$$\Leftrightarrow \text{razão} = \frac{\pi}{2}, \text{ como queríamos demonstrar.}$$

8.1.

Seja u_n a sucessão que a cada termo, faz corresponder o perímetro da correspondente semicircunferência e sendo u_n uma progressão aritmética, teremos

$$u_n = u_1 + (n - 1)r$$

Assim, neste caso, teremos

$$u_n = \frac{\pi}{2} + (n - 1)\frac{\pi}{2},$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{n\pi}{2}$$

Deste modo

$$u_{100} = 50\pi$$

Pelo que

$$S_{100} = \frac{0,5\pi + 50\pi}{2} \times 50$$

$$\Leftrightarrow S_{100} = 2525\pi, \text{ como queríamos demonstrar.}$$

9.

9.1.

Seja M o ponto médio de [AC].

Seja [AM] paralelo a [BN]

$$\overline{AC} = 2\overline{BN} = 2\overline{AM}$$

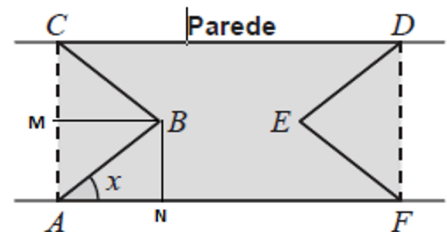
$$\text{sen } x = \frac{\overline{BN}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \text{sen } x = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \text{sen } x = \frac{\overline{AM}}{1,5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1,5\text{sen } x = \overline{AM}$$

Como

$$\overline{AC} = 2\overline{AM} \Leftrightarrow \overline{AC} = 2 \times 1,5 \text{sen } x \Leftrightarrow \overline{AC} = 3\text{sen } x$$

$$\text{Resposta: } \overline{AC} = 3\text{sen } x \text{ cm}$$



9.2.

Se por cada 5 voltas completas da manivela no mesmo sentido, a amplitude x aumenta 6° , então após 25 voltas completas a amplitude aumentou 30° .

Se após 25 voltas completas da manivela, \overline{AC} aumentou 1 metro, então (sabendo que $\overline{AC} = 3\text{sen } x$)
 $3\text{sen } x + 1 = 3\text{sen } (x + 30)$.

Resolvendo graficamente o problema:

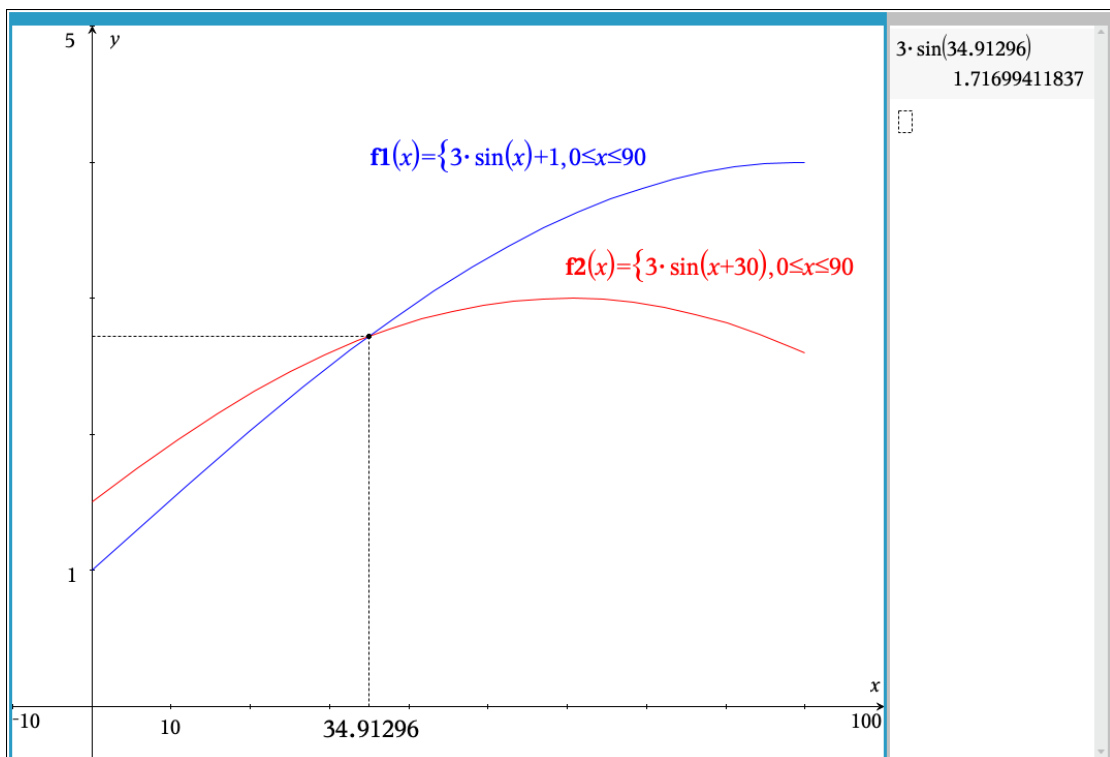
Considerando as funções:

$$f1(x) = 3\text{sen } x + 1$$

$$f2(x) = 3\text{sen } (x + 30)$$

restringidas ao intervalo $[0, 90^\circ]$.

Com a calculadora gráfica determinamos o ponto de interseção dos dois gráficos.



Obtemos, deste modo o valor de $x \approx 34,91296$, e então

$$\overline{AC} \approx 3\text{sen}(34,91296) \Leftrightarrow \overline{AC} \approx 1,717$$

Resposta: $\overline{AC} = 1,72$ metros.